

DISSECCIONS GEOMÈTRIQUES

Joan Trias i Pairó



1. L'art de comptar en Geometria

1.1 Introducció

En geometria podem considerar *configuracions geomètriques* formades per rectes, plans, rectangles, circumferències, esferes o altres objectes menys "regulars". Aquestes configuracions descomponen l'espai en parts produint el que anomenarem **disseccions geomètriques**, com es pot veure en algunes de les il·lustracions de la figura 1.

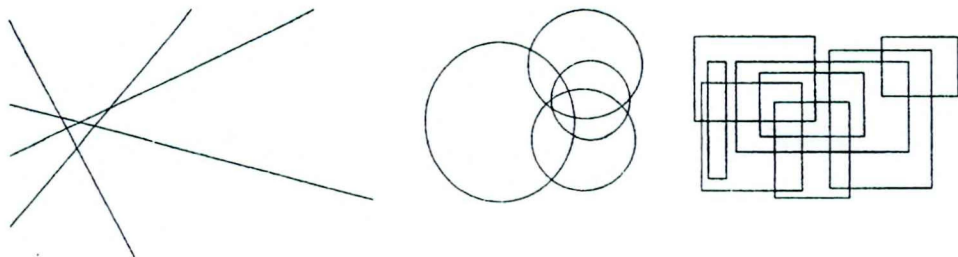


Figura 1. Disseccions geomètriques en el pla creades per rectes, circumferències i rectangles.

Aquestes configuracions generen disseccions geomètriques de l'espai, donen lloc a elements tals com *vèrtexs*, *cares* i *arestes*, i pot ser d'interès saber-los *comptar* o almenys avaluar-ne l'ordre de magnitud o tenir-ne alguna fita superior (vegeu figura 2).

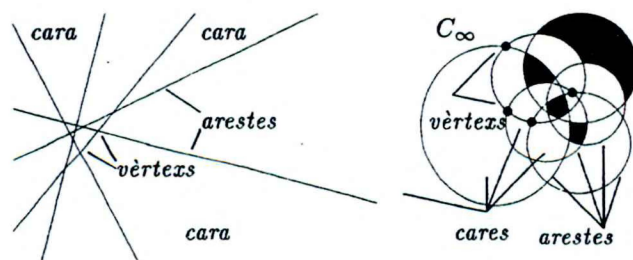


Figura 2. Disseccions amb *vèrtexs*, *arestes*, *cares* (algunes les hem indicat gràficament omplint-les de negre), algunes fitades i d'altres no; en el cas que hi hagi un única cara no fitada la indicarem per C_∞ .

A la dissecció per rectes en el pla es formen *vèrtexs* (interseccions de rectes), "*arestes*" (segments i semirectes) i "*cares*", que poden ser fitades o no. A la dissecció per circumferències es formen *vèrtexs*, *arestes* (arcs de circumferència), totes fitades i "*cares*" (parts

del pla limitades per arestes); en aquest tipus de dissecció hi ha una única cara no fitada; la resta són cares fitades.

Actualment aquest no és només un tema d'interès acadèmic o de curiositat intel·lectual, ja que aquestes estructures apareixen en aplicacions de *computació geomètrica*, com per exemple en *gràfics per ordinador* o *disseny geomètric assistit per ordinador*; per al disseny i anàlisi dels algorismes subjacents cal saber comptar o avaluar d'alguna manera el nombre d'elements geomètrics d'una estructura geomètrica.

Ens volem centrar en aquesta part de la publicació en problemes de disseccions geomètriques tant al pla com a l'espai i també en problemes que s'hi poden reduir, com són, per exemple, alguns problemes relatius a políedres; un dels avantatges és que sense requerir coneixements molt específics o amplis previs es poden formular enunciats ben entenedors, que es poden mantenir a un nivell elemental, enunciats prou interessants com perquè siguin atractius i al mateix temps, pel que fa al nivell, prou accessibles perquè siguin abordables.

En aquesta introducció veurem algunes tècniques, alguns resultats, i diversos exemples d'entrenament en el problema de comptar objectes geomètrics; seguirà al final una col·lecció d'enunciats per resoldre.

1.2 Les eines de l'ofici

Saber comptar és difícil: exigeix enginy, entrenament, experiència, és tot un art. Ara bé, també hi ha disponibles certes eines bàsiques que podem anomenar eines de l'ofici de comptar, que ens són útils tant per comptar elements en configuracions o disseccions geomètriques com en d'altres circumstàncies.

Dominar l'ofici exigeix l'ús de certes tècniques i disposar de resultats diversos; esmentem el més elemental:

- Disponibilitat d'identitats aritmètiques de sumació tancada.
- La inducció matemàtica, en diverses variants.
- Eines i conceptes de combinatòria elemental (i avançada, però no en aquest context).
- Mètodes elementals de resolució de recurrències.
- Relacions especials, com per exemple, la fórmula d'Euler per a grafs planars i altres.

2. Eines elementals

Exposem en aquest apartat només les eines més elementals que ens poden ser útils per comptar elements en configuracions geomètriques (i en d'altres situacions).

2.1 Identitats aritmètiques de sumació tancada

Algunes identitats aritmètiques interessants són expressions "tancades" de sumes que es presenten amb relativa freqüència, com són per exemple, les següents:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es poden provar de diverses maneres; una de les més usuals és aplicant el mètode d'inducció, com veurem a l'apartat següent.

En moltes ocasions aquestes identitats s'utilitzen auxiliàriament per derivar-ne conclusions més complexes.

Cal tenir present que de vegades es presenten segons diverses variants, com per exemple $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$; s'aplica la mateixa fórmula, però en comptes de n escrivim $n-1$ i resulta, per tant, $1 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)((n-1)+1) = \frac{1}{2}(n-1)n$. O també es presenta en situacions en les que hem de sumar, per exemple, $3 + 4 + \cdots + n$; aleshores és $3 + 4 + \cdots + n = (\sum_{k=1}^n k) - 1 - 2 = \frac{1}{2}n(n+1) - 3$.

En certes ocasions algunes identitats d'aquests tipus les descobrireu a partir d'experiments modestos, possiblement comptant sobre diversos exemples concrets de configuracions; un cop hom està convençut de la certesa d'una identitat, pot intentar de provar-la per inducció.

2.2 La inducció matemàtica

La inducció matemàtica és un mètode de demostració que sol ser molt útil en problemes d'enumeració i de càlcul del nombre d'elements de diversos tipus en configuracions geomètriques (i molts altres àmbits de la matemàtica); les situacions a les que hom pot aplicar aquest mètode són essencialment aquelles en les quals es tracta de demostrar una propietat $P(n)$ que s'enuncia en termes dels nombres naturals $n \in \mathbb{N}$.

Un primer exemple de demostració inductiva. Vegem la demostració inductiva de la primera de les identitats, segons l'esquema:

$$P(1)$$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1),$$

on $P(n)$ és la propietat de ser certa la igualtat

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

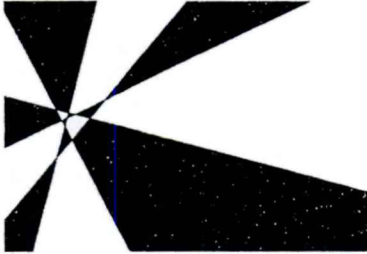
Pas 1. En primer lloc s'ha d'establir la fórmula per al primer valor per al qual tingui sentit, que és en aquest cas $n=1$; ara bé, per a $n=1$ la prova és una comprovació rutinària de la coincidència dels dos membres de la igualtat a demostrar.

Pas 2. En segon lloc, hem de suposar que la identitat és certa per a n per *hipòtesi d'inducció* i provar que és certa per al valor $n+1$; aquest pas, juntament amb el primer,

establirà la propietat per a tot $n \geq 1$. Suposant, doncs, que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ es compleix, podem escriure, aplicant la hipòtesi d'inducció:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

com volíem demostrar. Anàlogament provaríem d'altres identitats de sumació similars a aquesta.



Inducció en geometria. Considerem una descomposició del pla per n rectes en regions poligonals. Suposem que dues regions tenen frontera comuna si comparteixen una semirrecta o un segment de longitud no nul·la. Proveu que les regions es poden acolorir globalment amb 2 colors, de tal manera que les que tinguin frontera comuna siguin de colors diferents. El lector provarà de convencer-se que l'enunciat és correcte veient que és possible d'acolorir amb dos colors afegint rectes successives a les dis-

seccions que es van obtenint a partir de $n = 1$; presentarem aquí la demostració formal inductiva, i farem la demostració per inducció sobre n ; suposem que els colors són "blanc" (B) i "negre" (N).

Demostració.

Pas 1. Per a $n = 1$ és cert trivialment assignant colors diferents als dos semiplans produïts per l'única recta.

Pas 2. Suposem que per hipòtesi d'inducció es poden 2-acolorir (segons el criteri de l'enunciat) totes les disseccions per n rectes; en afegir una $(n+1)$ -èsima recta r arbitrària (figura 3) resulta una descomposició del pla en dos semiplans S_1 i S_2 .

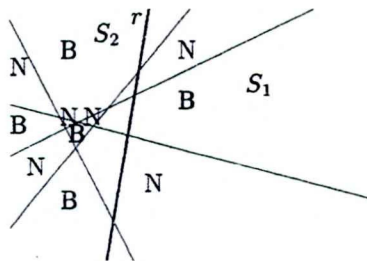
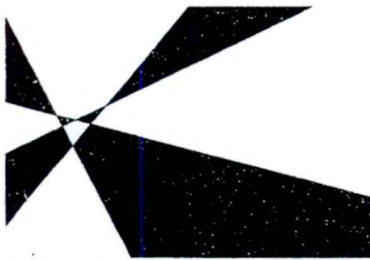


Figura 3

Considerem les coloracions sobre S_1 i S_2 induïdes per la 2-coloració general corresponent a les n rectes; això no constitueix una 2-coloració de la dissecció produïda per les $n+1$ rectes, ja que les cares noves que tenen per frontera comú segments o semirectes sobre r tenen la mateixa coloració. Vegem que podem obtenir una 2-coloració global (figura 4):

1. Mantenim la coloració sobre un dels semiplans, per exemple S_2 ; això deixa establerta una 2-coloració sobre aquest semiplà.
2. Intercanviem els colors de totes les regions de l'altre semiplà, S_1 , és a dir, els blancs passen a negres i els negres passen a blancs: això manté una 2-coloració sobre S_2 i, per l'intercanvi del color de les zones fronteres amb S_1 , obtenim la "compatibilitat" amb la 2-coloració de S_1 ; per tant, globalment s'ha produït una 2-coloració.

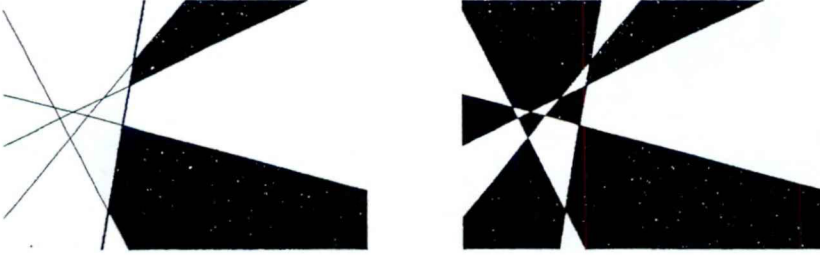


Figura 4

2.3 Combinatòria elemental

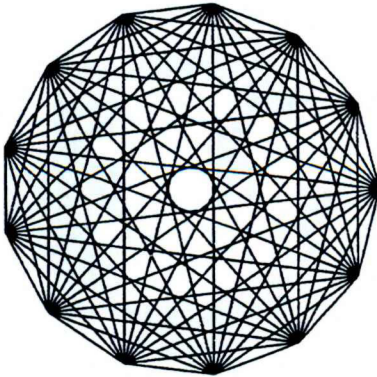
Les eines de la combinatòria són molt útils per comptar elements de configuracions geomètriques; aquí no anirem més enllà de les més elementals. Recordem simplement que el *coeficient binomial* és

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{si } n \geq k \\ 0, & \text{en cas contrari,} \end{cases}$$

on

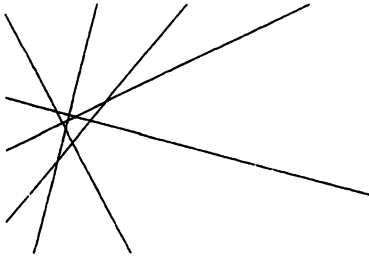
$$k! = \begin{cases} k(k-1) \cdots 2 \cdot 1, & \text{si } k > 0 \\ 1, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Vegem dos exemples senzills:



Exemple 1: Les diagonals d'un polígon. Les diagonals d'un polígon són els segments determinats per parelles de vèrtexs no consecutius inclosos a l'interior del polígon; en el cas d'un polígon convex, qualsevol segment determinat per dos vèrtexs no adjacents està contingut en el polígon i n'és, per tant, una diagonal. Considerem un polígon convex de n vèrtexs; es tracta de calcular el nombre de diagonals del polígon: cada diagonal està determinada per una parella de vèrtexs, sense que importi l'ordre, i el nombre de parelles de vèrtexs que es poden escollir en un conjunt de n vèrtexs és $\binom{n}{2}$, però aquest no és el nombre de diagonals,

ja que també hi són comptats en aquest còmput els costats del polígon, determinats per parelles de vèrtexs consecutius; atès que hi ha n costats, finalment el nombre de diagonals buscat serà $d = \binom{n}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-3)$.



Exemple 2: Disseccions planes per rectes. Considerem una disseció del pla determinada per $n \geq 1$ rectes en posició general, cosa que significa que no n'hi ha dues de paral·leles ni tres que passin per un mateix punt; es tracta de calcular el nombre de vèrtexs, interseccions de rectes, que es produeixen. No pot ser més fàcil: atesa la condició de no haver-ni dues de paral·leles, dues rectes qualsevol determinen un d'aquests vèrtexs i, per l'altra condició, cada vèrtex és intersecció d'exactament dues

rectes; per tant, els vèrtexs són exactament les interseccions de totes les parelles de rectes que es poden formar i, en conseqüència, el nombre de vèrtexs buscat és simplement el nombre de maneres de formar parelles de rectes, és a dir, $\binom{n}{2}$.

2.4 Resolució de recurrències

Una successió recurrent a_n és una successió de la qual coneixem explícitament alguns dels primers termes i una relació que ens permet d'obtenir el terme general en funció dels anteriors,

$$a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Per exemple, en seria una la següent:

$$a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}},$$

que és una possible descripció de la successió els primers termes de la qual serien

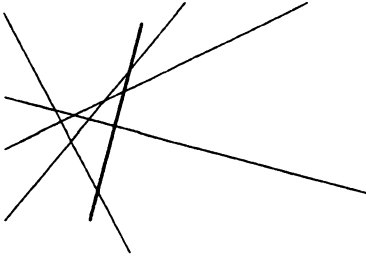
$$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \dots$$

Aquests tipus de successions apareixen molt sovint en còmput del nombre d'elements en configuracions geomètriques (nombre de cares, d'arestes i de vèrtexs) i també en processos de demostració inductiva; el que interessa és obtenir el terme general a_n expressat en forma tancada en funció de n ; per exemple, si tenim $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$, aleshores

$a_n = a_{n-1} + 1 = (a_{n-2} + 1) + 1 = \dots = a_1 + 1 + \overset{n-1}{\dots} + 1 = 1 + \overset{n}{\dots} + 1 = n$, tot i que no sempre és tan fàcil com en aquest exemple, realment trivial.

De vegades hom pot experimentar i induir quina és l'expressió del terme general en forma tancada, i aleshores es pot intentar de provar-la per inducció; de fet, hi ha mètodes sistemàtics de resoldre el problema, però no els veurem en aquesta secció. En els exemples

geomètrics i en els problemes, només necessitarem aplicar les fórmules de sumació tancada abans esmentades a l'apartat d'identitats aritmètiques per a la resolució de les recurrències que es puguin presentar .



Exemple geomètric de recurrències. Sigui novament una dissecció del pla per $n \geq 2$ rectes en posició general, és a dir se suposa que no hi ha dues rectes paral·leles ni n'hi ha tres que passin per un mateix punt, i es tracta de calcular el nombre d'arestes a_n de la dissecció (segments de recta i semirectes); considerem una dissecció de n rectes a l'esquema adjunt i considerem una nova $(n+1)$ -èsima recta, indicada amb gruix més gran.

Vegem quin és l'increment d'arestes degut a l'aparició d'una $(n+1)$ -èsima nova recta. La recta $(n+1)$ -èsima talla les n rectes per la condició de no paral·lelisme i produeix globalment n interseccions noves, ja que no pot tallar per la segona condició en un punt d'intersecció, ja preexistent, de dues rectes; la nova recta intercepta, doncs, n rectes que produeixen $n+1$ noves arestes sobre aquesta recta, travessa n arestes de les rectes que intercepta, una per cada recta, i les descompon en dues, amb la qual cosa l'increment net en el nombre d'arestes creades en aquesta operació és de n ; globalment, doncs, l'increment d'arestes és de $(n+1) + n = 2n+1$, per tant, $a_{n+1} = a_n + 2n+1$; així, doncs, la successió recurrent a estudiar és

$$a_1 = 1, a_{k+1} = a_k + 2k + 1, k \geq 1.$$

Així podem escriure:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) + 1, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2(n-2) + 1, \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 + 2 \cdot 2 + 1, \\ a_2 &= a_1 + 2 \cdot 1 + 1. \end{aligned}$$

Sumant membre a membre, i utilitzant una identitat aritmètica vista anteriorment, s'obté

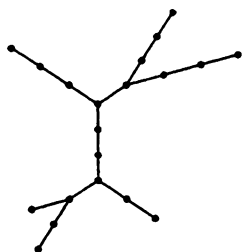
$$a_n = a_1 + 2((n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1) + (1 + \overset{n-1}{\dots} + 1) = a_1 + 2(\sum_{k=1}^{n-1} k) + (n-1) = a_1 + 2\frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2.$$

Observeu que és absolutament sorprenent que aquest resultat (com molts altres de tipus similar) només depengui del nombre de rectes, però no de quines són, és a dir, de com estan situades.

3. La fórmula d'Euler per a disseccions planes

Una relació especialment fructífera per als nostres propòsits de comptar és l'anomenada fórmula d'Euler per a grafs planars poligonals, estructura combinatòria a la quals es poden assimilar certes configuracions geomètriques per tal d'obtenir-ne informació.

3.1 Grafs planars poligonals



Un graf és una estructura combinatòria que ens permet de representar i estudiar situacions en les quals hi ha una col·lecció d'objectes, que es representen per punts del pla o **vèrtexs**, entre els quals pot haver-hi determinades relacions, que es representen per un enllaç gràfic (segment o arc) o **aresta**; podeu veure adjunt un esquema d'aquestes característiques. En termes formals un graf G és un parell ordenat $G = (V, A)$, on V és el conjunt de vèrtexs i A és el conjunt d'arestes, és a dir, de parelles de vèrtexs. Segueixen uns quants exemples de grafs a

la figura 5.

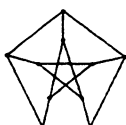
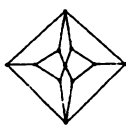
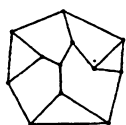
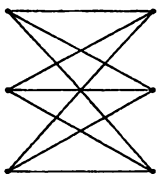


Figura 5

Un concepte interessant és el de *grau* d'un vèrtex, que és el nombre d'arestes que hi són incidents. Suposarem que els grafs amb els quals tractarem són tots d'"una sola peça" (tècnicament, *connexos*), és a dir que no hi ha cap desconexió i tots els vèrtexs són connectables amb tots els altres a través d'algun camí.



Com hem dit, un graf és una estructura combinatòria que pot tenir sentit sense necessitat de cap representació gràfica; ara bé, podem intentar de representar-la en el pla de manera que les arestes no es tallin (considerem que les arestes que són incidents a un vèrtex no s'hi tallen); no sempre és possible, com es pot veure (i provar) en el cas de graf adjunt, anomenat $K_{3,3}$, que és el clàssic graf dels "veïns enemics i els tres subministraments"; per més manipulacions gràfiques

que es facin en el moment de la representació del graf és impossible d'evitar que al menys dues arestes es tallin.

Un graf és **planar** si n'hi ha alguna representació en el pla en la qual no hi hagi arestes que es tallin, i en aquest cas tenim una representació planar del graf; a la figura 6 en tenim un exemple; apart dels vèrtexs i arestes, podem parlar de *cares* de la representació planar, entre les qual s'inclou l'única no fitada, que indiquem per C_∞ .

Suposarem que les cares (C_∞ inclosa) són *polígons* (de com a mínim tres costats), sense arestes ni estructures arbòries que hi penguin; aquests són els **grafs planars poligonals**. No

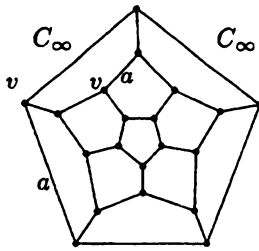


Figura 6. Observeu com la frontera de la cara no fitada C_∞ és també un polígon, concretament un pentàgon.

cal que les arestes siguin segments de recta: poden ser arcs de corba. Algunes disseccions geomètriques en el pla, com per exemple les determinades per n circumferències o per n rectangles són un cas particular de graf planar poligonal.

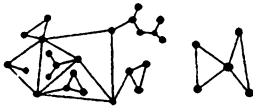


Figura 7. Exemples de grafs planars no poligonals; en el graf de la dreta la frontera de la cara C_∞ no és poligonal.

3.2 Fórmula d'Euler

En el context dels grafs planars poligonals connexos és vàlida l'anomenada **fórmula d'Euler**, que relaciona el nombre v de vèrtexs, el nombre a d'arestes i el nombre c de cares (c inclou la cara C_∞) d'un graf del tipus anterior; concretament podem enunciar el resultat següent:

Teorema (fórmula d'Euler). *Sigui $G = (V, A)$ un graf planar poligonal connex, v el nombre de vèrtexs, a el nombre d'arestes i c el nombre de cares (comptant-hi la cara C_∞ no fitada). Aleshores es compleix:*

$$c + v = a + 2.$$

La demostració de la fórmula d'Euler en aquesta situació simplificada és molt senzilla i ens servirà com a un exercici addicional en el mètode d'inducció, en una situació lleugerament diferent respecte de l'exemple de la demostració per inducció de les identitats aritmètiques; es recomana al lector que s'ajudi dels esquemes corresponents.

Demostració de la fórmula d'Euler. Sigui $G = (V, A)$ un graf planar poligonal connex; considerem-ne una representació planar. Suposem el nostre graf amb v vèrtexs, a arestes i c cares. Farem la demostració per inducció sobre el nombre de cares c .



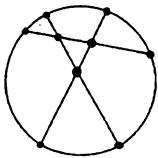
relació.

Pas 1. Suposem que $c = 2$, nombre mínim possible per a un graf planar poligonal; aleshores el graf està format per un polígon, les cares són C i C_∞ i resulta ser $a = v$, $c = 2$, amb la qual cosa trivialment es comprova que es compleix la



Pas 2. Sigui $c \geq 3$ i suposem per hipòtesi d'inducció que la fórmula d'Euler es compleix per a tot graf planar poligonal de c' cares, amb $c' < c$; es tracta de manipular el nostre graf per tal de passar a aquesta situació en la qual podem afirmar la validesa de la fórmula i deduir-ne conseqüències per al nostre graf. Considerem dues cares adjacents, és a dir que comparteixen arestes; concretament comparteixen una cadena de r arestes amb els corresponents $r - 1$ vèrtexs; essent $c \geq 3$, si eliminem aquesta cadena, les dues cares es fonen en una i globalment en perdem una. Això és justament el que farem: considerem la cadena de les r arestes comunes a dues cares veïnes de G i eliminem-la; el graf resultant G' segueix essent planar poligonal i es compleix: $v' = v - (r - 1) = v - r + 1$, $a' = a - r$, $c' = c - 1$; atès que $c' < c$ podem aplicar la hipòtesi d'inducció a G' i afirmar, per tant, $c' + v' = a' + 2$. Finalment, substituïnt a l'última fórmula s'obté $(c - 1) + (v - r + 1) = (a - r) + 2$, d'on $c + v = a + 2$, com s'havia de veure.

Moltes disseccions planes són de fet grafs planars poligonals i els serà, per tant, aplicable la fórmula d'Euler; vegem-ne un exemple a continuació.



Exemple d'aplicació de la fórmula d'Euler. Es considera la figura adjunta formada per un cercle sobre el qual tracem n segments, amb els extrems situats sobre la circumferència corresponent, que poden o no intersecar-se, de tal manera que no comparteixen extrems sobre la circumferència, és a dir, que cada extrem ho és només d'un segment; suposem que es produeixen p interseccions dels segments a l'interior

del cercle i que cada intersecció ho és d'exactament 2 segments diferents (és a dir, que no hi ha 3 segments que passin pel mateix punt). Es tracta de calcular el nombre de regions internes que es formen.

Solució. Calculem el nombre de vèrtexs v : hi ha p vèrtexs interiors a la circumferència, i $2n$ sobre la circumferència; per tant, $v = 2n + p$. Pel que fa al nombre d'arestes a raonem de la manera següent: p vèrtexs interiors aporten 4 arestes cadascun i els $2n$ vèrtexs perifèrics n'aporten 3 cadascun; ara bé, comptant d'acord amb aquesta idea comptem duplicadament totes les arestes, ja que cada arista hi és comptada per cada un dels seus dos extrems, que són vèrtexs; per tant, $4p + 3(2n) = 2a$, d'on resulta $a = 3n + 2p$. Ara aplicarem la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$ i, per tant, $c = (3n + 2p) + 2 - (2n + p) = n + p + 2$. Finalment, el nombre de cares interiors c_i serà $c_i = c - 1 = n + p + 1$. Observem que també es pot calcular immediatament el nombre d'arestes interiors, ja que de perifèriques n'hi ha $2n$ i, en conseqüència, d'interiors n'hi haurà $a_i = a - 2n = n + 2p$. Reviseu on hem fet servir les hipòtesis sobre la configuració.

4. Políedres i fórmula d'Euler

4.1 Políedres regulars i altres políedres



Un *políedre* és un objecte geomètric limitat per cares planes poligonals que és deformable (“homeomorf”) a esfera; en determinades ocasions quan parlem de políedres ens referirem només a aquesta superfície limitant, que serà una superfície polièdrica tancada. Un *convex* és un objecte que conté tots els segments determinats per parelles de punts del mateix objecte; existeixen molts de políedres que no són convexos, com per exemple els *estrellats*, com el que podem veure a la figura adjunta: el políedre estrellat es construeixen col·locant piràmides adequades sobre les cares d'un altre políedre convex. A la figura adjunta veiem un exemple de políedre estrellat, que és no convex.



Són ben coneguts els políedres clàssics, els *políedres regulars*, és a dir el tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre i icosaèdre; a la figura 8 els podem veure i en aquest paràgraf es pot observar un altre políedre (anomenat icosaèdre truncat) que no és un políedre regular, tot i compleix també determinades condicions de regularitat: l'estructura d'aquest últim políedre és la que dona forma a la “pilota de futbol”.

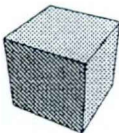
En aquestes figures observem ben clarament elements geomètrics tals com els *vèrtexs*, les *arestes* i les *cares*. Aquest elements defineixen una estructura de connectivitat que depassa les relacions mètriques en les figures (és a dir, les interdistàncies entre els punts dels objectes) i que es manté si es realitzen determinades transformacions, com certes deformacions que no impliquin ni talls ni trencaments de l'estructura.

Direm que un políedre és “regular” si tots els vèrtexs són incidents al mateix nombre d'arestes i totes les cares són polígons del mateix tipus; aquest és un concepte topològic de políedre regular, on només interessa la forma de les cares i les connectivitats entre vèrtexs i, per tant, s'admet deformació. Si a més s'exigeix que les cares siguin polígons regulars del mateix tipus, aleshores estem fent intervenir aspectes mètrics i obtenim els políedres regulars en sentit clàssic, dels quals es pot demostrar que n'existeixen cinc i no més.

tetràedre



cub



octàedre



dodecàedre



icosaèdre



Figura 8. Els cinc políedres regulars

4.2 Políedres i disseccions geomètriques

Perquè parlar de políedres en un tema de disseccions geomètriques? A primera vista no és molta la relació entre políedres i disseccions geomètriques en el pla, però això només és aparent, ja que mitjançant la projecció adequada (tècnicament, una projecció possible és la *projecció estereogràfica*) podem traslladar l'estructura de connectivitat del políedre

(vèrtexs, arestes i cares) al pla, formant així una dissecció plana i traslladant a propietats del políedre algunes propietats que es puguin obtenir a la dissecció; a la figura 9 podem veure un esquema relatiu al que s'ha esmentat.

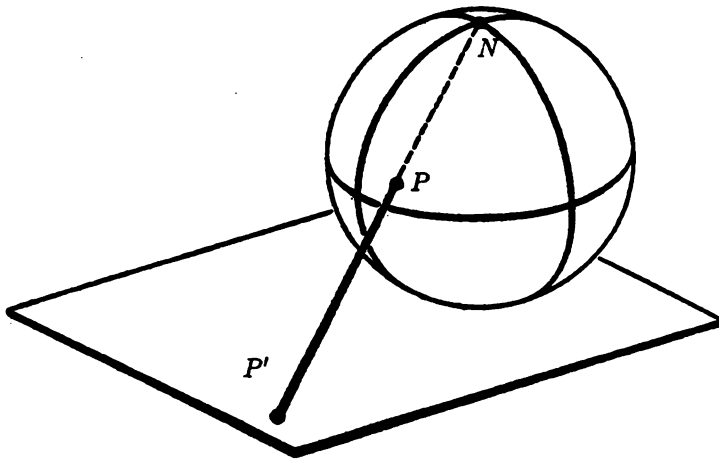


Figura 9. *Projecció estereogràfica. El pla de projecció és tangent a la superfície esfèrica per un punt que podem considerar "pol sud"; el centre de projecció és el punt diametralment oposat o "pol nord" N i la projecció de qualsevol punt $P \neq N$ de l'esfera és la intersecció del pla amb la recta NP.*

A les figures 10,11,12,13 i 14 es veuen projeccions planars o esquemes planars dels políedres regulars; aquestes projeccions poden obtenir-se per projecció estereogràfica, prèvia projecció del políedre sobre l'esfera (deixem molts de detalls tècnics sense precisar), projecció estereogràfica de pol de projecció situat a l'interior del que correspondria a una cara del políedre (el contorn o frontera d'aquesta cara és la que dona lloc a la frontera de l'única cara no fitada de la representació planar corresponent). La projecció estereogràfica és l'eina tècnica rigurosa per fer aquesta operació d'obtenir grafs planars combinatòriament equivalents als políedres, és a dir, amb els mateixos vèrtexs, cares i estructura de connectivitat, oblidant els aspectes mètrics, però de fet es poden obtenir en els casos més senzills aquests esquemes equivalents de forma intuïtiva; el lector es pot entretenir en dibuixar projeccions planars d'altres políedres, com per exemple del cub escapçat o en d'altres políedres més complexos.

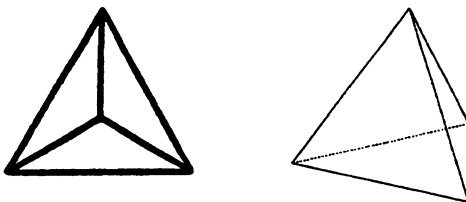


Figura 10.
El tetràedre

4.3 Fórmula d'Euler per a políedres

Una primera conseqüència és la validesa de la fórmula d'Euler per a políedres (suposem-los convexos, per simplificar, però aquesta restricció no és estrictament necessària), és a dir que es compleix:

$$C + V = A + 2,$$

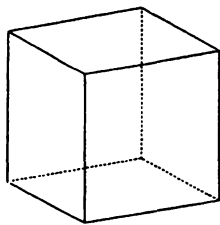
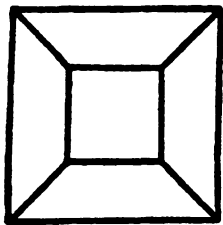


Figura 11.

El cub

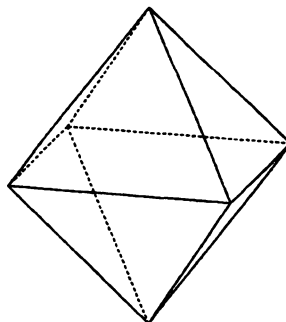
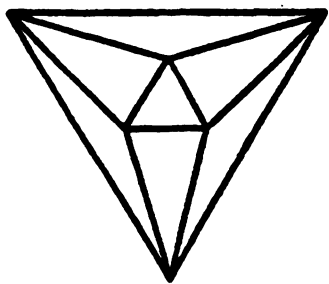


Figura 12.

L'octàedre

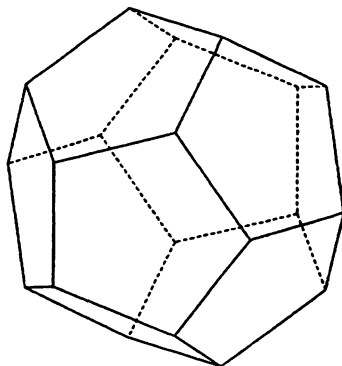
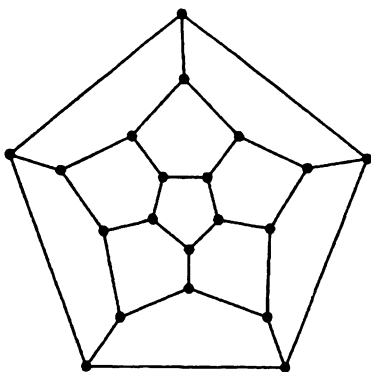


Figura 13.

El dodecàedre

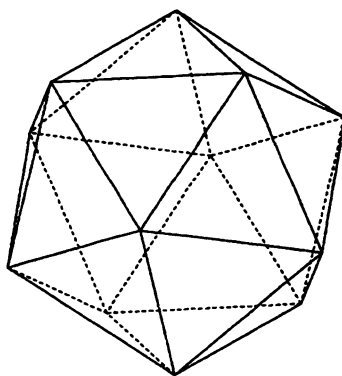
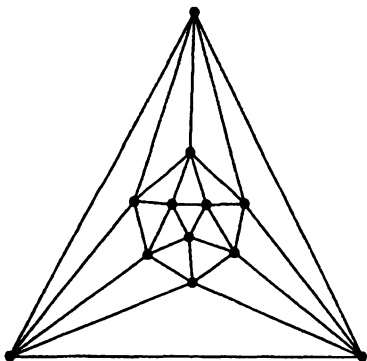


Figura 14.

L'icosàedre

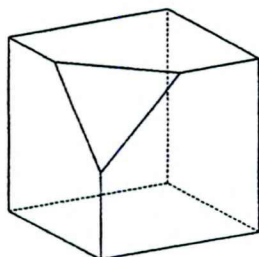
on C el nombre de cares, V el nombre de vèrtexs i A el nombre d'arestes.

4.4 Exemples d'aplicació

Vegem tres situacions de dificultat progressiva en els quals s'utilitza la fórmula d'Euler per a políedres:

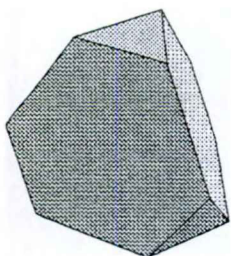


Exemple 1. Si ens diuen que l'icosàedre té 12 vèrtexs i 20 cares, el nombre d'arestes no pot ser altre que $a = c + v - 2 = 30$, i això també és vàlid per a qualsevol deformació "topològica" de la figura.



Exemple 2. Considerem un políedre convex de 10 vèrtexs tal que cada vèrtex és incident amb 3 arestes. Calculeu el nombre de cares i d'arestes. En efecte, considerem un graf planar poligonal associat, per al qual $v = 10$; comptem el nombre d'arestes a partir de les que "aporta" cada vèrtex, que és precisament 3; ara bé, aquesta manera de comptar ens dóna el doble del nombre d'arestes, de manera que poden escriure $3v = 2a$, d'on $a = 15$. Ara apliquem la fórmula d'Euler per obtenir $c = a + 2 - v = 7$. Observeu que el cub

escapçat de la figura demostra que n'existeixen de políedres amb aquestes característiques; construïu diversos grafs planars poligonals associats al políedre.

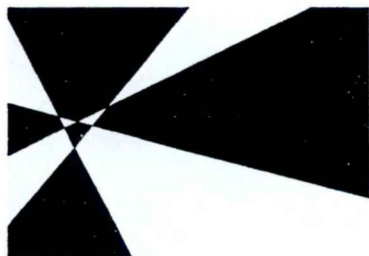


Exemple 3. Considerem un políedre format per cares triangulars i hexagonals, de manera que cada vèrtex és incident amb 3 arestes. Demostreu que té exactament 4 cares triangulars. Obteniu també el nombre de vèrtexs i arestes en funció de les cares hexagonals. Observeu que existeixen políedres que s'ajusten a aquestes característiques, com el de la figura adjunta, que és un tetràedre truncat, obtingut per escapçat o truncament del tetràedre regular.

Solució. Siguin n_3 el nombre de cares triangulars i n_6 el nombre de cares hexagonals; òbviament és $c = n_3 + n_6$. Comptem el nombre d'arestes a partir de les que aporta cada vèrtex: cada vèrtex contribueix amb 3 al càlcul global d'arestes, però com que cada aresta hi és comptada dues vegades, resulta la relació $3v = 2a$; comptem-les ara a partir de les que aporta cada cara: les cares triangulars n'aporten 3, i les hexagonals, 6, però això significa comptar-les duplicadament, ja que totes les cares són polígons i, en conseqüència, tota aresta pertany a la frontera comuna d'exactament 2 cares; per tant, podem escriure $3n_3 + 6n_6 = 2a$. Finalment, utilitzant aquestes relacions i substituint a la fórmula d'Euler $c + v = a + 2$, s'obté una relació entre n_3 i n_6 , concretament $(n_3 + n_6) + (n_3 + 2n_6) = \frac{3}{2}n_3 + 3n_6 + 2$, d'on se'n deriva que $n_3 = 4$. Al mateix temps s'obté $v = 4 + 2n_6$ i $a = 6 + 3n_6$.

5. Enunciats d'exercicis

Es recomana d'intentar resoldre els problemes pel màxim de mètodes possibles dels que hom sigui capaç.



DG1.— *Amb dos colors n'hi ha prou (1).* Considereu una descomposició o dissecció del pla per n rectes en regions poligonals. Es considera que dues regions tenen frontera comuna si comparteixen una semirrecta o un segment de longitud no nul·la. Formuleu una altra variant de demostració inductiva del resultat que afirma que una dissecció en el pla és 2-acolorible segons la idea següent: elimineu una recta de la dissecció de n rectes; d'aquesta operació en resulta una dissecció de $n' = n - 1 < n$ rectes

que és 2-acolorible per hipòtesi d'inducció; continueu amb arguments similars als de la demostració donada.

DG2.— *Amb dos colors n'hi ha prou (2).* Es tenen n circumferències en el pla. Proveu que amb 2 colors n'hi ha prou per acolorir el mapa que determinen. Estudieu si és cert un resultat anàleg per a la dissecció determinada per n rectangles com els de la figura 15.

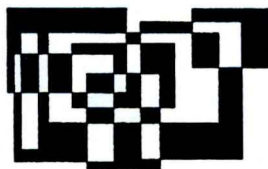
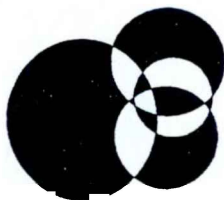


Figura 15

DG3.— *Disseccions per rectes.* Considereu una dissecció del pla per $n \geq 1$ rectes en posició general, cosa que significa que no n'hi ha dues de paral·leles ni tres que es tallin en un punt. La dissecció produeix un nombre v_n de vèrtexs, un nombre a_n d'arestes (segments de longitud no nul·la o semirectes) i un nombre c_n de regions poligonals o cares.

a) Proveu que $v_n = \binom{n}{2}$, $a_n = n^2$ i $c_n = \binom{n}{2} + n + 1$.

b) Calculeu el nombre de cares o regions no fitades. Quin és el nombre de cares fitades?

DG4.— *Disseccions per plans.* Calculeu en quantes regions polièdriques divideixen l'espai n plans en posició general (és a dir, tres qualssevol es tallen i no n'hi ha quatre que tinguin un punt comú).

DG5.— *Disseccions per circumferències.* Considereu n circumferències en el pla en posició tal que es tallen dos a dos i no n'hi ha tres que es tallin en un mateix punt. Calculeu el nombre d'interseccions, d'arcs de circumferència i regions planes (limitades pels arcs) que es produeixen.

DG6.— *Disseccions per esferes.*

- Calculeu en quantes regions divideixen l'esfera n circumferències sobre l'esfera que es tallen dues a dues.
- En quantes parts divideixen l'espai n esferes si dues qualssevol es tallen.

DG7.— *Mapes.* Proveu que si a cada vèrtex d'un mapa convergeix un mínim de 3 fronteres, aleshores hi ha un país que com a molt té cinc fronteres.

DG8.— Sigui P un polígon convex de n costats tal que no hi ha tres diagonals que es tallin en un punt.

- Calculeu el nombre de diagonals.
- Calculeu el nombre d'interseccions interiors de les diagonals.
- Calculeu el nombre d'arestes produïdes per les diagonals amb les seves interseccions mútues.
- Calculeu el nombre de regions poligonals interiors produïdes per les diagonals.

DG9.— Sigui P un políedre convex amb 12 vèrtexs i 30 arestes. Proveu que totes les cares són triangulars.

DG10.— Considereu un políedre convex format per cares triangulars i quadrangulars tal que cada vèrtex pertany a exactament 4 cares. Proveu que conté exactament 8 triangles.

DG11.— Considereu un políedre convex de 10 cares tal que tot vèrtex és incident amb 4 arestes exactament. Calculeu el nombre de vèrtexs i d'arestes.



DG12.— Considereu un políedre de n vèrtexs format per cares triangulars (n'existeixen, ja que per exemple l'icosàedre n'és un, entre d'altres possibles). Proveu que el nombre d'arestes és $a = 3n - 6$ i que el nombre de cares és $c = 2n - 4$.

DG13.— Proveu que en un políedre de cares quadrangulars es compleix $a = 2v - 4$ i $c = v - 2$.

DG14.— Proveu que per a un políedre de cares pentagonals es compleix $c = \frac{2}{3}(v - 2)$ i $a = \frac{5}{3}(v - 2)$.

DG15.— Demostreu que si un políedre té totes les cares formades per un mateix tipus de polígon, aleshores només poden ser o triangles o quadrilàters o pentàgons.

DG16.— Considerem una dissecció planar poligonal del pla formada per quadrilàters excepte possiblement la cara no fitada. Demostreu que el nombre de vèrtexs de la cara no fitada és parell. Vegeu la versió en termes de políedres: si existeix un políedre amb totes les cares quadrangulars excepte possiblement una, proveu que aquesta hauria de tenir un nombre parell de costats.

DG17.– Demostreu que no existeixen políedres convexos tal que tots els vèrtexs siguin incidents amb sis o més arestes.



DG18.– *Fullerens o pilota de futbol.* Els fullerens són compostos químics de recent descobriment; constitueixen la tercera estructura a l'espai segons la qual es pot trobar el carboni; els àtoms de carboni ocupen els vèrtexs d'un políedre format per cares pentagonals o hexagonals i els enllaços dobles o simples constitueixen les arestes de l'estructura polièdrica, de manera que cada carboni s'enllaça exactament amb tres carbonis veïns. És la mateixa estructura, en un cas concret, que la de la pilota de futbol. Considereu un políedre convex tal que per a tot vèrtex hi ha exactament 3 arestes incidents i les cares són pentagonals o hexagonals. Proveu que ha de tenir exactament 12 cares pentagonals.

DG19.– *Buckminsterfullerè.* El buckminsterfullerè és un compost químic format per 60 àtoms de carboni enllaçats entre sí formant una estructura polièdrica convexa. Cada àtom està enllaçat a exactament 3 àtoms, i sabem que les cares són hexàgons o pentàgons.

- Calculeu el nombre d'hexàgons.
- Calculeu el nombre de pentàgons.
- Calculeu el nombre d'arestes.

DG20.– Demostreu que no existeix cap políedre format per cares hexagonals, pentagonals i amb tots els vèrtexs de grau 4, és a dir, incidents amb 4 arestes.

DG21.– Si un políedre és de cares pentagonals i tots els vèrtexs són incidents amb un mateix nombre g d'arestes, proveu que $g = 3$.



DG22.– *Triangulacions.* Considerem polígons de $n \geq 3$ vèrtexs (no necessàriament convex) sense forats; una *diagonal interna* d'un polígon és un segment determinat per dos vèrtexs no consecutius, contingut al polígon. Una *triangulació* d'un polígon és una descomposició en reunió de triangles produïts afegint diagonals internes, de tal manera que els solapaments entre triangles siguin d'àrea nul·la. La descomposició no és única, com es pot veure fàcilment. Demostreu:

- Un polígon sempre és triangulable. *Indicació:* demostreu l'existència d'alguna diagonal interna, utilitzeu-la per descompondre el polígon en dos polígons de nombres inferiors de costats respectivament i acabeu la demostració per inducció.
- Si tenim una triangulació d'un polígon mitjançant t triangles produïts afegint m diagonals internes, calculeu t i m en funció de n , demostrant així que són independents de la particular triangulació, i només depenen del nombre de vèrtexs. El resultat a provar és: $t = n - 2$, $m = n - 3$.
- Demostreu com a conseqüència dels apartats anteriors que la suma dels angles interiors d'un polígon de n costats és $\pi(n - 2)$. Quina és la suma dels exteriors?

d) Un vèrtex d'un polígon es diu *convex* si l'angle interior corresponent és menor estricta que π . Proveu que tot polígon té un mínim de 3 vèrtexs convexas.

DG23.— *Enunciat de la XXX Olimpíada Matemàtica, 26 de Febrer 1994 (generalitzat).* Un polígon de n costats es descompon en m triangles amb interiors disjunts, de manera que cada costat d'aquests m triangles ho és també d'alguns altre triangle contigu o del polígon donat.

a) Demostreu que $m + n$ és parell.

b) Coneguts n , m , trobeu el nombre de costats diferents que queden a l'interior del polígon i el nombre de vèrtexs diferents que queden a aquest interior.

Indicació: podeu resoldre'l directament, utilitzant la fórmula d'Euler, o bé indirectament utilitzant els resultats del problema de triangulació. En el cas convex la resolució és més simple.